3. COMPORTEMENT VISCOÉLASTIQUE ET MODELES RHÉOLOGIQUES

3.1 Introduction

Les progrès dans le domaine de la science des matériaux ont conduit à une utilisation de plus en plus importante et diversifiée des matériaux dits viscoélastiques ou bien polymères. Ses derniers représentent souvent une alternative aux matériaux métalliques, et ce, en raison de leur faible masse, de couts de production réduits, de facilité de mise en forme, de recyclage …, mais aussi de dissipation d'énergie mécanique.

Pour cela, ils sont très employés dans diverses applications comme les couches viscoélastiques précontraintes [1,2], ou les verres feuilletés. Dans la fabrication des parebrises, la couche centrale est composée d'un verre feuilleté et n'a pas seulement le rôle d'anti éclatement, mais aussi le rôle acoustique en limitant son rayonnement et un rôle d'évacuation de l'énergie dans les impacts. Ils sont de fait beaucoup utilisés dans l'automobile et l'aéronautique. Aussi, en génie civil, les liaisons entre les pièces métalliques sont réalisées avec des pièces qui intègrent des couches de matériaux viscoélastiques.

Afin de développer une bonne compréhension de vibration et de l'amortissement structural, une compréhension des matériaux et des propriétés de matériel qui font partie de la structure éprouvante est dans le premier ordre. Les matériaux viscoélastiques sont des polymères présentant à la fois des propriétés visqueuses et élastiques et qui sont largement utilisés dans la conception des amortisseurs passifs [3], d'un point de vue mécanique, la viscoélasticité, est la propriété d'un matériau de présente outre un comportement élastique, un comportement visqueux provoquant une évolution des propriétés mécaniques du matériau dépendant du temps. Le comportement purement élastique du solide décrit son aptitude à retrouver sa forme initiale après avoir été soumis à des déformations. Le comportement purement visqueux représente quant à lui la faculté du liquide à s'écouler de façon irréversible. Le matériau viscoélastique se retrouve donc dans un état mécanique particulier intermédiaire entre le solide purement élastique et le liquide purement visqueux [8].

Le chapitre est dédié au comportement viscoélastique présenté par la modélisation des phénomènes de fluage et de relaxation des matériaux les plus connus dans le domaine le PTFE et le Polycarbonate. Une approche par rigidité complexe est utilisée dans le modèle de maxwell généralisé permettant la détermination des paramètres de la série de Prony pour définir le matériau viscoélastique dans ABAQUS. Nous présentant les matériaux viscoélastiques, ces

caractéristiques, les modèles rhéologiques qui présente le mécanisme de comportement viscoélastique provoquant le phénomène réel de fluage et de relaxation des matériaux en utilisant le PTFE- Polycarbonate [3, 4, 6, 9, 10, 12]. Les déterminations de la courbe de relaxation à l'intermédiaire des transformations mathématiques, ainsi que la variation du module de stockage, de perte et le facteur de perte pour chaque matériau ont été présentés et discutés.

3.2 Identification de la viscoélasticité

La viscoélasticité vise à décrire les matériaux9élastiques qui présentent une vitesse de déformation ou une réponse dépendante9du temps à la contrainte appliquée. Une *viscoélasticité est supposée linéaire*, si les fonctions de relaxation et de fluage9varient en fonction du temps seulement. Et pour la *viscoélasticité non linéaire*, les fonctions de relaxation et de fluage sont en fonction à la fois du temps et1de la contrainte ou la déformation.

Un matériau viscoélastique a un comportement qui se situe1entre un matériau élastique et un liquide visqueux [1,2], dans le cas d'un matériau élastique, la contrainte est reliée directement à la déformation, mais indépendante1du taux de déformation (en accord avec la loi de Hooke), contrairement dans un liquide visqueux ou la contrainte est reliée directement au taux de déformation, mais indépendante de la déformation elle-même (la loi de Newton).
Pour un matériau viscoélastique, la contrainte va donc dépendre à la fois de la déformation et du taux de déformation. Ceci n'est qu'une idéalisation du comportement1réel des matériaux viscoélastiques, car en réalité tout matériau dévie plus ou moins de la loi de Hooke ou de Newton en raison d'anomalies. Par exemple pour un solide, on retrouve souvent ce genre d'anomalies lorsque la1limite élastique du matériau a été dépassée. Si ce genre d'anomalies sur la contrainte n'est pas présent, on a ce qu'on appelle1un comportement viscoélastique linéaire.

3.3 Caractéristiques des matériaux viscoélastiques

Le comportement viscoélastique d'un matériau peut être mis en évidence par différents essais mécaniques tels que l'essai de : fluage, Relaxation.

3.3.1 Essai de fluage

L'essai de fluage recouvrance est présenté dans la figure 3.1 [7] consiste dans un premier lieu à :

- Mesure de la déformation $\varepsilon(t)$ sous l'application d'une contrainte σ_0 pendant un temps donné t_1.
- Une fois que le temps t_1 Atteint, on retire la charge ($\sigma = 0$).
- À l'instant $t = 0$, une déformation instantanée ε_0 suite à l'application de la contrainte σ_0 qui correspond à la réponse élastique du1matériau appelée élasticité instantanée.
- Ensuite une évolution progressive de la déformation jusqu'à arriver à une déformation ε_1 au temps t_1 À la fin de l'essai de fluage.

Au début de l'essai de recouvrance, lorsque la charge est enlevée, on remarque que :

- Une diminution instantanée de la déformation pour arriver jusqu'à une valeur de ε_2.

Dans le cas d'un matériau viscoélastique linéaire, la valeur de $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varepsilon_0$ est appelée : Le retour instantané.

- La déformation diminue ensuite progressivement pour arriver jusqu'à une déformation nulle au bout d'un certain temps ($t > t_1$).

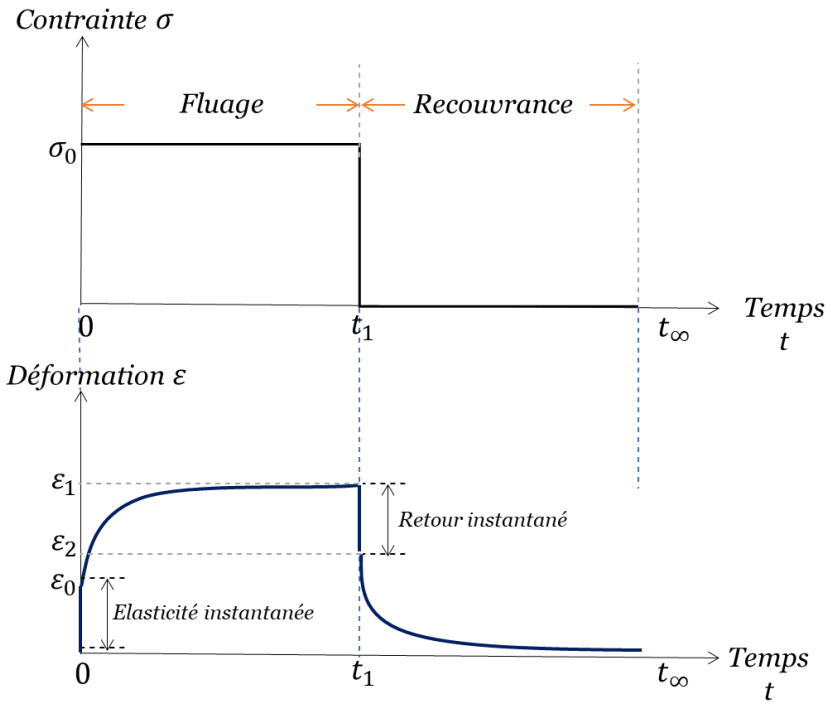


Fig. 3.1 Essai de fluage.

3.3.1.1 Déroulement de l'essai

L'éprouvette n'est pas initialement chargée, elle est en équilibre et son matériau constitutif est alors dans son état naturel (état de contrainte nul).

A l'instant $t = 0$ on impose instantanément un échelon de contrainte d'amplitude σ_0 cette contrainte est ensuite maintenue constante.

On constate alors une déformation instantanée ε_0 puis une augmentation de la déformation ε_1 au cours du temps

Dans ce cas, on peut écrire l'histoire de la sollicitation sous la forme :

$$\sigma(t) = \sigma_0 Y(t - t_0) = \sigma_0 Y_{t_1} \tag{3.1}$$

Où :

$$Y_{t_1} = \begin{cases} 0 \text{ si } t < t_1 \\ 1 \text{ si } t > t_1 \end{cases}$$

Y_{t_1} : *la fonction de Heaviside.*

La réponse viscoélastique, en termes de déformation, se met sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t, t_1; \sigma_0) = \sigma_0 J_{t_1} \tag{3.2}$$

$J(t_1, t)$: *La fonction de retard.*

L'essai de fluage nous permet de mesurer la complaisance $D(t)$ définie par :

$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \tag{3.3}$$

Le comportement viscoélastique est dit linéaire lorsque la réponse est proportionnelle et additive par rapport à la sollicitation.

3.3.2 Essai de Relaxation

Lorsqu'un polymère soumis à une déformation constante, la contrainte se relâche avec le temps, c'est-à-dire que la contrainte diminue pour atteindre une valeur d'état stable [6,7].

Après avoir terminé l'essai de relaxation figure 3.2 on mesure de la contrainte $\sigma(t)$ suite à l'application d'une déformation donnée instantanée ε_0 que l'on maintient constante ensuite pendant un temps t_1.

- À l'instant *t = 0* on mesure une contrainte σ_0 qui correspond également à la réponse élastique du matériau.
- Ensuite, la contrainte diminue jusqu'à arriver à une certaine valeur au bout d'un temps important dans le cas d'un matériau viscoélastique linéaire.

Après avoir effectué l'essai de relaxation, on peut déterminer l'histoire de la sollicitation ainsi que la réponse correspondante en termes de contrainte par la méthode suivante :

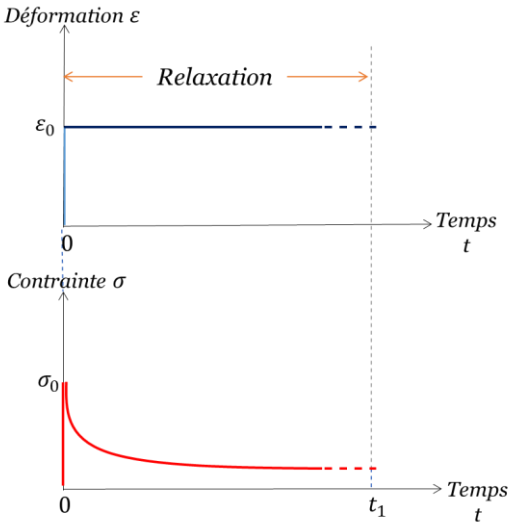


Fig. 3.2 Essai de relaxation

Dans ce cas, on peut écrire l'histoire de la sollicitation sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t - t_1) = \varepsilon_0 H_{t_1} \tag{3.3}$$

La réponse correspondante, en termes de contrainte :

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 R(t - t_1) = \varepsilon_0 R_{t_1} \tag{3.4}$$

Où $R(t - t_1)$ est appelée la fonction de relaxation.

L'essai de relaxation permet de mesurer le module de relaxation *E(t)* défini par :

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \tag{3.5}$$

3.3.3 Essai de Recouvrance

L'essai de recouvrance figure 3.3 nécessite l'application d'un créneau de contrainte d'amplitude σ_0 entre deux instants t_0 et t_1 puis on détermine l'évolution de la déformation dans le temps. [2,8].

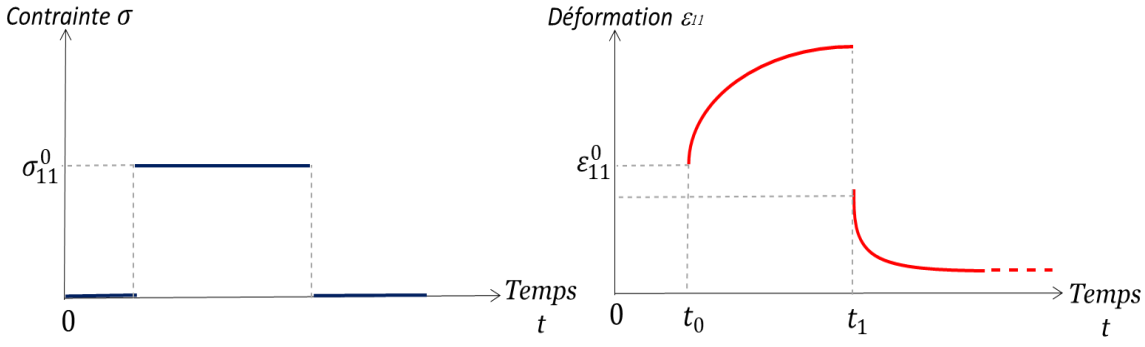


Fig. 3.3 Essai de recouvrance.

- Pour $t < t_1$, on retrouve l'expérience de fluage. Mais pour t = t_1 correspondant au relâchement de la contrainte, on assiste à un retour instantané élastique de la déformation.
- Pour $t < t_1$, il y a une apparition de la recouvrance jusqu'à l'annulation de la déformation et retour à l'état initial.

3.4 Forme intégrale de la superposition de Boltzmann pour le fluage et la relaxation

Le principe de Boltzmann est basé sur l'idée que la superposition des sollicitations implique la superposition homologue des réponses [1,2]. Dans une considération plus mathématique, le principe de superposition énonce la linéarité du comportement du matériau considéré. La correspondance fonctionnelle entre l'histoire de sollicitation en contrainte σ et l'histoire de sollicitation en déformation ε est traduite par la loi de comportement isotherme du matériau, dans le cadre uni axial.

La réponse aux contraintes peut être généralisée en utilisant l'intégrale de superposition de Boltzmann comme :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} C(t-\tau)\frac{d\varepsilon(t)}{d\tau}d\tau \tag{3.6}$$

Une expression similaire peut être développée pour la réponse en déformation pour une quantité infinie de contraintes appliquées,

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-\tau)\frac{d\sigma(t)}{d\tau}d\tau \tag{3.7}$$

Où *S(t)* est la complaisance au fluage, qui est nulle pour $t < 0$.

L'intégrale de superposition de Boltzmann peut être convertie en une équation différentielle ordinaire en utilisant des transformées de Laplace. Ces ODE peuvent être utilisées pour interpréter des modèles physiques de comportement viscoélastique.

La transformée de Laplace des deux côtés de l'équation (3.6) donne,

$$\mathcal{L}\left[\sigma(t)\right] = \bar{\sigma}(s) = \mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} C(t-\tau)\frac{d\varepsilon(t)}{d\tau}d\tau\right] \tag{3.8}$$

En utilisant l'intégrale de convolution, le côté droit de l'équation (3.6) peut être écrit comme

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} C(t-\tau)\frac{d\varepsilon(t)}{d\tau}d\tau\right] = \bar{C}(s)\frac{d\bar{\varepsilon}(s)}{d\tau} \tag{3.9}$$

La transformée de Laplace inverse de l'équation ci-dessus donne :

$$\left[\int_{-\infty}^{t} C(t-\tau)\frac{d\varepsilon(t)}{d\tau}d\tau\right] = \mathfrak{T}^{-1}\left[\bar{C}(s)\frac{d\bar{\varepsilon}(s)}{d\tau}\right] \tag{3.10}$$

En tenant compte de l'équation 3.6

$$\bar{\sigma}(s) = \mathfrak{T}\left[\mathfrak{T}^{-1}\left[\bar{C}(s)\frac{d\bar{\varepsilon}(s)}{d\tau}\right]\right] = \left[\bar{C}(s)\frac{d\bar{\varepsilon}(s)}{d\tau}\right] \tag{3.11}$$

En appliquant des transformées de Laplace de dérivés et en négligeant les conditions initiales, l'équation ci-dessus peut être réécrite sous la forme :

$$\bar{\sigma}(s) = s\bar{C}(s)\bar{\varepsilon}(s) \tag{3.12}$$

$$\bar{\varepsilon}(s) = s\bar{S}(s)\bar{\sigma}(s) \tag{3.13}$$

Le module de relaxation et de complaisance au fluage peut être liés l'un à l'autre comme,

$$\bar{S}(s)\bar{C}(s) = \frac{1}{s^2} \tag{3.14}$$

Notons que les principes en viscoélasticité linéaire ne sont applicables qu'aux faibles niveaux de déformations de l'échantillon. Le comportement viscoélastique n'est linéaire que lorsque les grandeurs viscoélastiques (complaisances et modules) sont indépendantes du niveau de la sollicitation.

3.5 Modélisation du comportement mécanique des matériaux viscoélastiques

La réponse mécanique des matériaux viscoélastiques à l'excitation mécanique est traditionnellement modélisée en termes de1composants élastiques et visqueux tels que les ressorts et les amortisseurs [1,2, 8]. La théorie correspondante est analogue à la théorie du circuit électrique, qui est largement décrite1dans le manuel d'ingénierie. L'utilisation de modèles mécaniques joue un rôle essentiel dans l'interprétation de la viscoélasticité des matériaux dans les cas1les plus simples. Cependant, il faut souligner que la représentation du comportement viscoélastique en termes de ressorts et d'amortisseur n'implique pas que ces éléments reflètent le1comportement moléculaire de matériaux complexes. De plus, il existe une multiplicité de modèles1pour représenter les mêmes mécanismes de comportement viscoélastique provoquant le1comportement de relaxation réelle des matériaux complexes [8].

Une description basée sur des caractéristiques matérielles complexes est donc plus apte à décrire la viscoélasticité dans ce domaine. Dans cette approche non paramétrique, la partie réelle de ces caractéristiques est liée à l'élasticité tandis que la partie imaginaire correspond à la dissipation.

Les modèles mécaniques élémentaires, comme ceux de Maxwell, Kelvin-Voigt et Zener, permettent de décrire par des représentations mathématiques le comportement viscoélastique uniaxial des polymères. Le caractère élastique est traduit par des ressorts de module d'élasticité E et le caractère visqueux est représenté par des amortisseurs de viscosité η. Ces deux grandeurs sont alors constantes et indépendantes du temps. Les différents modèles peuvent être obtenus par association en série ou/et en parallèle de ressorts et d'amortisseurs. Le ressort est un élément permettant d'emmagasiner de l'énergie mécanique récupérable.

3.5.1 Modèle de Maxwell

Comme il est bien connu, les ressorts et les amortisseurs représentent, respectivement, les réponses élastiques et visqueuses idéales aux perturbations des contraintes. D'une manière similaire, une combinaison des deux peut être utilisée pour décrire le comportement viscoélastique des matériaux. Dans le modèle de Maxwell, un ressort est en série avec un amortisseur, l'idéalisation la plus immédiate de ce comportement est donnée sur la figure 3.4.

Le modèle de Maxwell prédit un changement linéaire de la contrainte en fonction du temps pour la réponse au fluage.



Fig.3.4 Modèle analogique de Maxwell

Considérons d'abord la réponse du modèle de Maxwell à une contrainte σ. La déformation ε est donnée par :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{3.15}$$

Où : ε_1 et ε_2 sont les déformations du ressort et l'amortisseur, respectivement. Étant donné que les contraintes au ressort et l'amortisseur les mêmes $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$, nous avons :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$$
$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\sigma_2}{\eta} \Rightarrow \sigma_2 = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt} \tag{3.16}$$
$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Avec $\dot{\varepsilon}_2$: c'est la vitesse de déformation

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$$
$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\sigma_2}{\eta} \Rightarrow \sigma_2 = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt} \tag{3.17}$$
$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Il n'y a pas une proportionnalité entre la contrainte et la déformation, mais plutôt une équation constitutive plus complexe :

$$\Rightarrow E\,\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + \frac{E}{\eta}\sigma \quad \text{on prend } \tau = \frac{\eta}{E}$$
$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau}\dot{\sigma} = E\,\dot{\varepsilon} \Rightarrow E\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\tau}\sigma \tag{3.18}$$

Une équation différentielle d'ordre 1 est obtenue, alors pour la résoudre il faut déduire l'équation différentielle homogène ou $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ pour avoir la fonction de Relaxation et $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ pour la fonction de fluage :

$$\left[E\,\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + \frac{1}{\tau}\sigma \right]_{\frac{d\varepsilon}{dt}=0} = \left[\dot{\sigma} = -\frac{1}{\tau}\sigma \right]$$
$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{\tau}\sigma(t) \tag{3.19}$$

Pour déterminer l'équation précédente, il faut premièrement réorganiser les dérivés par rapport au temps

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dt}{\tau}$$

En intégrant les deux parties de l'équation, on obtient :

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t dt \Leftrightarrow \ln\sigma - \ln\sigma_0 = -\frac{1}{\tau}t$$
$$\ln(\frac{\sigma}{\sigma_0}) = -\frac{1}{\tau}t \qquad (3.20)$$

Finalement la formule qui exprime la fonction de contrainte :

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\eta}{E}, \qquad (3.21)$$

Si on prend pour un *t = 0*, seulement le ressort qui va se déformer initialement $\sigma_0 = E\varepsilon_0$

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = E\varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E(t) \qquad (3.22)$$
$$E(t) = E\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

E(t) : *la Fonction de relaxation*

Maintenant, pour déduire la fonction de fluage il faut qu'on pose que $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, alors l'équation différentielle devienne :

$$\left[\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}\sigma\right]_{\frac{d\sigma}{dt}=0} = \left[\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta}\sigma\right]$$
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\eta}\sigma \overset{Integration}{\Rightarrow} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{1}{\eta}\int_0^t \sigma dt \qquad (3.23)$$

Après l'intégration bornée, on obtient :

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{\sigma}{\eta}t \quad \text{avec} \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E}$$
$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{\eta}t + \frac{\sigma}{E} \rightarrow \varepsilon = \sigma\left(\frac{1}{\eta}t + \frac{1}{E}\right) \qquad (3.24)$$
$$J(t) = \frac{1}{\eta}t + \frac{1}{E}$$

J(t) : la fonction de fluage.

3.5.2 Modèle de Maxwell généralisé

Si en met en parallèle un nombre *n* fini d'éléments de Maxwell. Cela il s'appelle le modèle de Maxwell généralisé

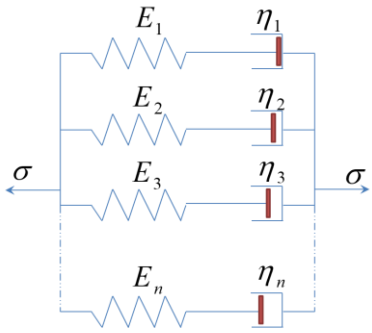


Fig. 3.5 Modèle de Maxwell généralisé

La contrainte totale est la somme des contraintes de chaque élément :

$$\sigma_f(t) = \sum_{n=1}^{n} \sigma(t)$$
$$\Rightarrow \sigma_f(t) = \sum_{n=1}^{n} \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.25)$$

L'expression de la fonction de relaxation pour le modèle généralisé de Maxwell sera de la forme :

$$E_f(t) = \sum_{n=1}^{n} E(t) = \sum_{n=1}^{,n} E e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.26)$$

3.5.3 Modèle de Kelvin Voigt

Un ressort et un amortisseur montés en parallèle représentés dans la figure 3.6 représente le modèle de Kelvin-Voigt.

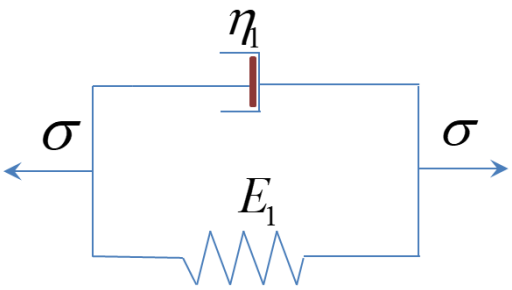


Fig. 3.6 Modèle de Kelvin-Voigt

La contrainte totale est donnée par la somme des deux contraintes et les déformations sont égales :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \end{cases} \quad (3.27)$$

Avec :

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \Rightarrow \left[\sigma = E\varepsilon_1 + \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt} \right]_{\varepsilon=\varepsilon_1=\varepsilon_2} \tag{3.28}$$

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Après les simplifications, on peut obtenir l'équation différentielle du premier ordre :

$$\rightarrow \dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta}\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} \tag{3.29}$$

La solution de cette équation différentielle de premier ordre est comme suit

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E}(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}) \tag{3.30}$$

Pour déduire la fonction de fluage il faut que $\sigma = Cst \Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = 0$, l'équation 3.30 devienne :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} - \frac{\sigma}{E}e^{-\frac{E}{\eta}t} = \sigma\left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E}e^{-\frac{E}{\eta}t}\right) = \sigma\left[\frac{1}{E}(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t})\right] \tag{3.31}$$

La fonction de fluage est donc déduite et donnée par :

$$\varepsilon(t) = \sigma J(t)$$

$$avec \quad J(t) = \frac{1}{Rigidité} = Souplesse$$

Par appariement, on peut obtenir la fonction de fluage

$$\Rightarrow J(t) = \frac{1}{E}(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}) \tag{3.32}$$

J(t) : fonction de fluage.

Pour obtenir la fonction de Relaxation, il faut déduire l'équation différentiel avec $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = 0$

$$\left[\dot{\varepsilon}+\frac{E}{\eta}\varepsilon=\frac{\sigma}{\eta}\right]_{\dot{\varepsilon}=\frac{d\varepsilon}{dt}=0}\Rightarrow\frac{E}{\eta}\varepsilon=\frac{\sigma}{\eta}$$
$$\Rightarrow\varepsilon=\frac{\sigma}{E} \tag{3.33}$$

Le modèle Kelvin ne correspond pas aux données de relaxation, car il ne présente pas de relaxation dépendante du temps.

3.5.4 Modèle de Kelvin-Voigt généralisé

La déformation totale est la superposition (addition) des déformations de chaque modèle de Kelvin :

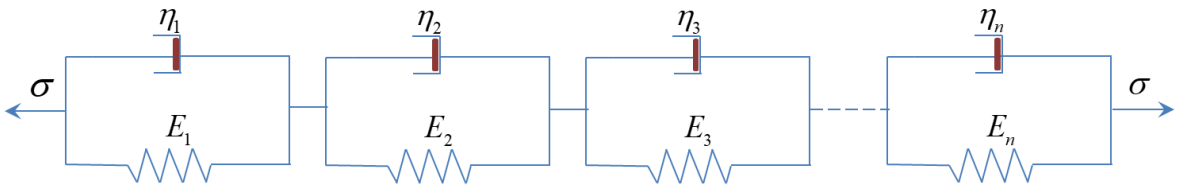


Fig. 3.7 Modèle de Kelvin-Voigt généralisé

$$\varepsilon_{tot}=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+.....\varepsilon_n \tag{3.34}$$

La fonction de fluage du modèle de Kelvin généralisé est la somme des fonctions de fluage de chaque élément, on peut obtenir la formule suivante

$$J_{tot}(t)=\sum_{n=1}^{n}J(t)=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{E}(1-e^{-\frac{E}{\eta}t}) \tag{3.35}$$

3.5.5 Modèle de Zener (solide linéaire standard SLS)

Le modèle solide linéaire standard est un modèle à trois paramètres qui contient un modèle de Kelvin Voigt (E_1,η) en série avec un bras élastique E_2.

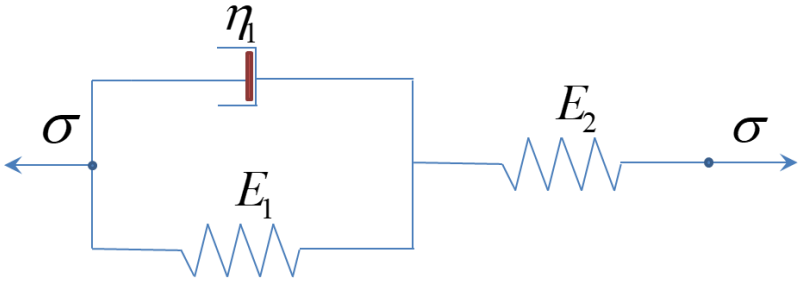


Fig. 3.8 Modèle de Zener (SLS)

Dans cette configuration, sous une contrainte axiale appliquée, les deux éléments sont soumis à la même contrainte :

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \tag{3.36}$$

Mais la déformation dans ce cas est l'addition des deux déformations dans les bras :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \xrightarrow{\text{dérivé par rapport au temps}} \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} \tag{3.37}$$

Avec : $\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = \dfrac{\sigma}{\eta} - \dfrac{E_1}{\eta}\varepsilon_1 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 = \dfrac{\dot{\sigma}}{E_2} \end{cases}$

En introduisant les valeurs de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}_i$ dans l'équation (3.37) on obtient :

$$\Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E_1}{\eta}\left(\varepsilon - \varepsilon_2\right) + \frac{\dot{\sigma}}{E_2}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E_1}{\eta}\varepsilon + \frac{E_1}{\eta}\varepsilon_2 + \frac{\dot{\sigma}}{E_2} \quad \text{avec } \varepsilon_2 = \frac{\sigma}{E_2} \tag{3.38}$$

$$\rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E_1}{\eta}\varepsilon + \frac{E_1}{\eta}\left(\frac{\sigma}{E_2}\right) + \frac{\dot{\sigma}}{E_2} \Rightarrow \dot{\varepsilon} + \frac{E_1}{\eta}\varepsilon = \frac{1}{E_2}\dot{\sigma} + \left(\frac{E_1}{\eta E_2} + \frac{1}{\eta}\right)\sigma$$

Après des simplifications, l'équation devienne :

$$\left(\frac{\eta}{E_1 + E_2}\right)\frac{d\sigma}{dt} + \sigma = \left(\frac{\eta E_2}{E_1 + E_2}\right)\frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}\right)\varepsilon$$

$$\Rightarrow K_3\dot{\sigma} + \sigma = K_1\dot{\varepsilon} + K_2\varepsilon \quad \text{(L'équation générale de SLS)} \tag{3.39}$$

Ou $\begin{cases} K_1 = \dfrac{\eta E_2}{E_1 + E_2} \\ K_2 = \dfrac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \\ K_3 = \dfrac{\eta}{E_1 + E_2} \end{cases}$

La résolution de cette équation différentielle particulière donne :

$$\sigma(t)=\left[\left(\frac{E_2^2}{E_1+E_2}\right)e^{-\frac{E_1+E_2}{\eta}t}+\left(\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}\right)\right]\varepsilon \tag{3.40}$$

L'expression de la fonction de relaxation pour le modèle de Zener est comme suit :

$$E(t)=\left(\frac{E_2^2}{E_1+E_2}\right)e^{-\frac{E_1+E_2}{\eta}t}+\left(\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}\right) \tag{3.41}$$

E(t) : La fonction de relaxation.

3.5.6 Approche par module complexe

Le fluage et la relaxation sont des essais qui permettent de bien caractériser un matériau pour des phénomènes d'une durée suffisamment longue (minute, heure, jour …). Mais lorsqu'ils sont beaucoup plus rapides, les tests dynamiques s'avèrent nécessaires, avec une description du comportement viscoélastique dans le domaine fréquentiel.

L'utilisation d'un module de rigidité complexe est la méthode la plus répandue pour déterminer le module complexe du matériau $E(\omega)$ et le module dynamique $|E(\omega)|$.

$x \in \Re$ Est la solution réelle qui représente le module de stockage $\Re[E(\omega)]$.

$y \in C$ Est la solution imaginaire qui représente le module de perte $\Im[E(\omega)]$.

Supposant que :

$$\begin{cases} x = P\cos(\omega t+\delta) \\ y = P\sin(\omega t+\delta) \\ z = x+iy \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = P\cos(\omega t+\delta)+iP\sin(\omega t+\delta) = Pe^{i(\omega t+\delta)} \tag{3.42}$$

L'écriture imaginaire est alors comme suit :

$$z = Pe^{i\delta}\overset{N}{e^{i\omega t}} = Ne^{i\omega t}$$

$$\text{avec} \begin{cases} |N| = P \\ \delta = \tan\left(\frac{\Re[N]}{\Im[N]}\right) \end{cases} \tag{3.43}$$

δ : L'angle de déphasage (facteur de perte).

ω : Fréquence angulaire.

$P,\ N$: constants réels.

Pour une vibration forcée à une pulsation ω, le module complexe du matériau peut donc être défini par :

$$E(\omega) = \Re\left[E(\omega)\right] + i\Im\left[E(\omega)\right] \tag{3.44}$$

Le module dynamique est déterminé en calculant l'amplitude du module complexe

$$\left|E(\omega)\right| = \sqrt{\Re\left[E(\omega)\right]^2 + \Im\left[E(\omega)\right]^2} \tag{3.45}$$

Une expression semblable au module de Young complexe E' peut-être employée pour le module complexe G'de cisaillement défini comme :

$$G(\omega) = \Re\left[G(\omega)\right] + i\Im\left[G(\omega)\right] \tag{3.46}$$

3.5.6.1 Module complexe du modèle de Maxwell

Pour déterminer les modules complexes de Maxwell, il faut fonder que :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \dfrac{d\varepsilon}{dt} = i\omega\varepsilon \\ \dot{\sigma} = \dfrac{d\sigma}{dt} = i\omega\sigma \end{cases} \tag{3.47}$$

En les introduisant dans l'équation différentielle de Maxwell (voir *Eq.* 4) on obtient :

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}\sigma \Rightarrow i\omega\varepsilon = \left(\frac{i\omega}{E} + \frac{1}{\eta}\right)\sigma \\ &\Rightarrow \sigma = \overbrace{\left(\frac{i\omega}{E} + \frac{1}{\eta}\right)^{-1}}^{E(i\omega)} i\omega\,\varepsilon \end{aligned} \tag{3.48}$$

Pour simplifier le calcul, il faut multiplier $E(i\omega)$ par son conjugué pour arriver à la forme suivante :

$$E(i\omega) = \left(\frac{i\omega}{E} + \frac{1}{\eta}\right)^{-1} i\omega * \frac{\left(\dfrac{i\omega}{E} - \dfrac{1}{\eta}\right)}{\left(\dfrac{i\omega}{E} - \dfrac{1}{\eta}\right)} = \frac{\left(\dfrac{-\omega^2}{E} - \dfrac{i\omega}{\eta}\right)}{\left(\dfrac{-\omega^2}{E^2} - \dfrac{1}{\eta^2}\right)} = \frac{\left(\dfrac{\omega^2}{E} + \dfrac{i\omega}{\eta}\right)}{\left(\dfrac{\omega^2}{E^2} + \dfrac{1}{\eta^2}\right)} \tag{3.49}$$

$$\Rightarrow E(i\omega) = \underbrace{\frac{\left(\frac{\omega^2}{E}\right)}{\left(\frac{\omega^2}{E^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)}}_{E'} + i\underbrace{\frac{\left(\frac{\omega}{\eta}\right)}{\left(\frac{\omega^2}{E^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)}}_{E''} \tag{3.50}$$

Le module de Young composé par deux parties : une partie réelle qui présente la rigidité *E'* et l'autre imaginaire qui représente l'amortissement *E »* :

E' : La composante du module en phase avec la déformation, appelé module de conservation, car il caractérise l'énergie emmagasinée dans l'échantillon sous forme élastique.

E » : La composante du module en quadrature de phase avec la déformation, appelé module de perte, car il caractérise l'énergie dissipée dans l'échantillon sous forme visqueuse.

$$E(i\omega) = E' + iE'' \Rightarrow \begin{cases} E' = \dfrac{\left(\frac{\omega^2}{E}\right)}{\left(\frac{\omega^2}{E^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)} (Rigidité) \\ E'' = \dfrac{\left(\frac{\omega}{\eta}\right)}{\left(\frac{\omega^2}{E^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)} (Amortissement) \end{cases} \tag{3.51}$$

Maintenant, En calcule l'amplitude de $E(i\omega)$ pour déterminer le module dynamique :

$$|E(i\omega)| = \sqrt{\left(\frac{\left(\frac{\omega^2}{E}\right)}{\left(\frac{\omega^2}{E^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\left(\frac{\omega}{\eta}\right)}{\left(\frac{\omega^2}{E^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)}\right)^2} = \left(\frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{E^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)}}\right)\left(\frac{\sqrt{E^2\eta^2}}{\sqrt{E^2\eta^2}}\right) \tag{3.52}$$

$$\Rightarrow |E(i\omega)| = \frac{\omega E\eta}{\sqrt{E^2+\eta^2\omega^2}}$$

Facteur de perte *D* est calculé à partir de la tangente entre *E'* et *E »* :

$$D = \tan(\delta) \approx \frac{E'}{E''} = \frac{\left(\frac{\omega^2}{E}\right)}{\left(\frac{\omega^2}{E^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)} \Bigg/ \frac{\left(\frac{\omega}{\eta}\right)}{\left(\frac{\omega^2}{E^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)} = \frac{E}{\omega\eta} \tag{3.53}$$

3.5.6.2 Module complexe du modèle Kelvin-Voigt

L'équation différentielle de Kelvin-Voigt en introduisant la vitesse de déformation complexe $\dot{\varepsilon}$ est :

$$\dot{\varepsilon}+\frac{E}{\eta}\varepsilon=\frac{\sigma}{\eta} \quad \text{pour} \quad \dot{\varepsilon}=i\omega\varepsilon$$
$$\Rightarrow \sigma = E\varepsilon + i\eta\omega\varepsilon = \overbrace{\left(E+i\eta\omega\right)}^{E(i\omega)}\varepsilon \tag{3.54}$$

Le module complexe du matériau $E(i\omega)$ pour le modèle de Kelvin présente une partie réelle *E'* et l'autre imaginaire *E* » où :

$$E' = E \quad \text{et} \quad E'' = \eta\omega \tag{3.55}$$

Ce qui nous a permet de calculer l'amplitude et l'angle de déphasage pour le modèle de Kelvin-Voigt

$$\begin{cases} E(i\omega) = \sqrt{E^2 + (\eta\omega)^2} \\ D = \tan(\delta) \approx \dfrac{E}{\eta\omega} \end{cases} \tag{3.56}$$

3.6 Comportement des modules de stockages et de pertes sous un chargement sinusoïdal

Lorsqu'un matériau viscoélastique soumit à une contrainte variante sinusoïdalement, il y aura un angle de phase δ entre la contrainte et la déformation. Cet angle de phase δ crée l'hystérésis observée dans les courbes cycliques contraintes-déformations qui peut être lié à l'amortissement du matériau (figure 3.9).

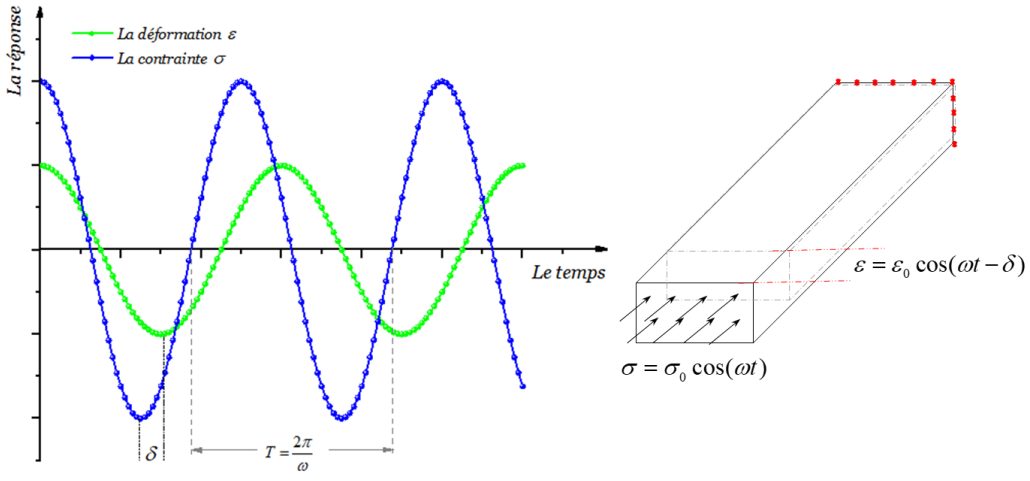


Fig. 3.9 Réponse d'un matériau viscoélastique soumis à une contrainte sinusoïdale

Si on applique une contrainte sinusoïdale : $\sigma = \sigma_0 \cos(\omega t)$ ou σ_0 c'est l'amplitude maximum de la contrainte pour chaque cycle et ω est la pulsation, la déformation sera :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \delta) \tag{3.57}$$

Ou ε_0 c'est la déformation maximale et δ c'est l'angle de phase.

Et aussi $\sigma = E\varepsilon$ l'équation précédente sera :

$$\sigma = E\varepsilon_0 \cos(\omega t + \delta) \tag{3.58}$$

En effectuant des transformations trigonométriques pour simplifier et déduire les modules de perte *E »* et de stockage *E'* :

$$\cos(\omega t + \delta) = \cos(\omega t)\sin(\delta) + \sin(\omega t)\cos(\delta) \tag{3.59}$$

L'équation devienne :

$$\sigma = E\varepsilon_0 \left[\cos(\omega t)\sin(\delta) + \sin(\omega t)\cos(\delta)\right]$$

$$\Rightarrow \sigma = \overbrace{E\sin(\delta)}^{\text{Module de perte } E''} \varepsilon_0 \cos(\omega t) + \overbrace{E\cos(\delta)}^{\text{Module de stockage } E'} \varepsilon_0 \sin(\omega t) \tag{3.60}$$

$$\sigma = E''\varepsilon_0 \cos(\omega t) + E'\varepsilon_0 \sin(\omega t)$$

$E' = E\cos(\delta)$ Représente le module de stockage ou la composante de la contrainte est de même phase avec la déformation (contribution élastique) et c'est également une mesure de l'énergie élastique stockée et récupérée pendant un cycle de chargement. Le terme $E'' = E\sin(\delta)$ représente le module de perte ou la composante de la contrainte est hors de la phase (déphasage 90°) de la déformation (contribution visqueuse). C'est une mesure de l'énergie dissipée (chaleur) dans un cycle de chaque déformation.

Alors, les matériaux viscoélastiques stockent l'énergie pendant la déformation (exprimée par le module et le *E'* de stockage) et dissipent l'énergie pendant le déchargement (exprimées par le module *E »* de perte). L'angle de phase entre la contrainte et la déformation est exprimé comme tangente :

$$\eta = \tan(\delta) = \frac{E''}{E'} \tag{3.61}$$

η : Le facteur de perte (dissipation).

Il mesure l'amortissement (aussi appelé « friction interne ») durant la déformation dynamique, soit la capacité du corps viscoélastique à dissiper l'énergie mécanique en chaleur. Pour un matériau purement élastique (l'angle de phase δ = 0), le facteur de perte est égal à zéro contrairement pour un matériau visqueux.

3.7 Séries de Prony

La présente partie propose une méthodologie de caractérisation des matériaux viscoélastiques à travers un problème d'identification inverse dans le domaine temporel. La méthodologie développée permet de caractériser les matériaux viscoélastiques avec un comportement viscoélastique simple. À cette fin, des données expérimentales, extraites des courbes de traction / déformation [ANNEXE 1] à différentes vitesses de déformation et températures ont été utilisées comme point de départ.

La formulation mise en œuvre était basée sur le modèle constitutif de la Série de Prony [3, 4,10]. Le processus d'identification inverse a utilisé une technique d'optimisation implémentée dans le code MATLAB [ANNEXE 1].

Les séries de Prony ont été utilisées par Park 1999 [10] dans une tentative d'appliquer une méthode numérique efficace dans le domaine temporel pour relier les fonctions de relaxation et de fluage des matériaux viscoélastiques, qui ont été testées en utilisant des données expérimentales provenant de quelques matériaux polymères. Une méthode pour déterminer les coefficients de la série de Prony d'un module de relaxation viscoélastique a été développée par Chen 2000 [9] en utilisant des données de charge en fonction du temps pour différentes séquences de rapport de charge ajustées aux intégrales de convolution des matériaux testés.

Dans un test de relaxation unidimensionnel, le matériau est soumis à une déformation maintenue constante pendant toute la durée de l'essai. La contrainte initiale est due à la réponse élastique du matériau. Ensuite, la contrainte se détend avec le temps en raison des effets visqueux du matériau. Les données de contrainte en fonction du temps qui en résultent peuvent être équipées d'un certain nombre d'équations, appelées modèles de Prony pour la relaxation qui est donnée par la formule suivante :

$$K(t) = K_\infty + \sum_{k=1}^{n} G_k e^{-\frac{t}{\tau_k}} = K_0 \left(1 - \sum_{k=1}^{n} g_k (1 - e^{-\frac{t}{\tau_k}}) \right) = \frac{E(t)}{3(1-2\nu)} \tag{3.62}$$

$$G(t) = G_\infty + \sum_{k=1}^{n} G_k e^{-\frac{t}{\tau_k}} = G_0 \left(1 - \sum_{k=1}^{n} g_k (1 - e^{-\frac{t}{\tau_k}}) \right) = \frac{E(t)}{2(1+\nu)} \tag{3.63}$$

G_0 & K_0 : les valeurs du module de cisaillement et du module de compressibilité pour un temps $t = 0$.

G_k et τ_k sont les constantes de la série de Prony de matériau obtenues à partir de l'ajustement de la courbe du module de relaxation en cisaillement G_R.

$t \to 0,\ G(t) \to G_0$

$t \to \infty, G(t) \to G_\infty$

Avec $$\begin{cases} G_\infty = G_0\left(1-\sum_{k=1}^{n} g_k\right) \\ K_\infty = K_0\left(1-\sum_{k=1}^{n} g_k\right) \end{cases} \quad (3.64)$$

L'expansion en série de Prony du module de relaxation (module de cisaillement) dans le domaine temporel peut être écrite :

$$G_R(t) = G_\infty + G_0 \sum_{k=1}^{n} g_k \ e^{-\frac{t}{\tau_k}} \quad (3.65)$$

En utilisant des transformées de Fourier, le module de relaxation de cisaillement dépendant du temps peut être exprimé dans le domaine fréquentiel comme suit :

$G^*(i\omega) = G_s(\omega) + iG_L\ (\omega)$ avec $i^2 = -1$

Le module de stockage : $$G_s(\omega) = G_\infty + G_0 \sum_{i=1}^{n} g_k \frac{(\omega\tau_k)^2}{1+(\omega\tau_k)^2} \quad (3.66)$$

Le module de perte $$G_L(\omega) = G_0 \sum_{k=1}^{n} g_k \frac{(\omega\tau_k)}{1+(\omega\tau_k)^2} \quad (3.67)$$

Lorsque $\omega \to 0,\ G_s(0) = G_\infty$: Le module de stockage $G_s(\omega)$ s'approche du module de relaxation à long terme G_∞.

Et pour des fréquences plus importantes $\omega \to \infty \Rightarrow G_s(0) = G_0$: Le module de stockage s'approche du module de relaxation instantané G_0.

3.8 Modèle constitutif et lois de comportement

Un modèle constitutif est une description mathématique d'un matériau. Il vise à relier entre eux des phénomènes physiques tels que les contraintes, les déformations, la température et le temps. Le modèle constitutif le plus connu est la loi de Hooke de 1676 qui relie linéairement la contrainte et la déformation. Il est valable pour les métaux soumis à une charge modérée. Pour les polymères, Il existe plusieurs méthodes pour définir un matériau viscoélastique dans

ABAQUS, la plus fréquente est d'introduire les valeurs des modules relatifs (coefficients de série de Prony g_k et τ_k) alors pour déterminer ces modules il faut définir à la fois le module de cisaillement *G(t)* et le module de compressibilité *K(t)* par l'implication d'une fonction de transfert de système temporaire (transformée de Laplace) qui transforme le module de complaisance *D(t)* déduit d'un essai de fluage à un module de relaxation *E(t)* par les équations suivantes:

$$D(t) = d_0^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i^2 [1 - e^{\frac{-1}{\tau_i^D} t}] \tag{3.68}$$

$$E(t) = \mathcal{I}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 \mathcal{I}[d_0^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i^2 (1 - e^{\frac{-1}{\tau_i^D} t})]}\right] \tag{3.69}$$

Avec :

d_0 : La valeur de D (t =0),

d_i : La valeur de la complaisance pour un temps caractéristique.

τ_i^D , τ_i^K, τ_i^G: Les temps caractéristiques.

$\mathcal{L}$ & $\mathcal{I}^{-1}$: Transformée de Laplace et son inverse.

v : Le coefficient de Poisson du matériau.

Les essais de fluage permettaient de calculer la complaisance $D(t)$ à l'intermédiaire de l'équation 3.68. La complaisance peut être exprimée sous forme de spectre discret de retardation, ce spectre est défini par un nombre arbitraire n_i de couples $D_i(t)$; τ_i^D; d_0 .

Nous avons choisi un nombre de 4 et 3 couples $D_i(t)$; τ_i^D respectivement pour le PTFE et le Polycarbonate. Les temps caractéristiques $\tau_1^D; \tau_2^D; \tau_3^D; \tau_4^D$ ont été choisis de manière logarithmique, car c'est dans les premiers instants que la courbe est la moins stable et donc que l'on a besoin de plus de termes pour la définir.

Pour capturer le phénomène de fluage $\varepsilon(t) = f(t)$ dans un modèle constitutif, une contrainte de traction unie axiale est appliquée sur une éprouvette de longueur l_0 et maintenue constante dans le temps et la déformation est mesurée à différents moments $\varepsilon(t)$.

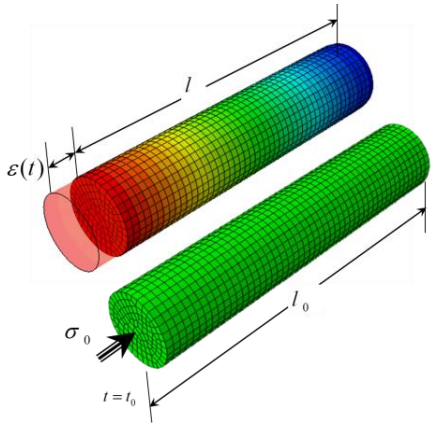


Fig. 3.10 Fluage d'une éprouvette viscoélastique

La figure 3.10 contient le comportement de la déformation au fil du temps. La déformation de fluage s'accumule sur la base du modèle de fluage, et donc la déformation de fluage augmente.

3.9. Étude sur les matériaux utilisés (PTFE, Polycarbonate)

Nous présenterons brièvement les propriétés des différents matériaux proposés dans cette étude (PTFE, Polycarbonate) ainsi que leurs modes de fabrication. Nous présenterons également les différentes étapes pour caractériser au mieux ces matériaux. Enfin, nous déterminerons les propriétés mécaniques nécessaires à la modélisation d'un matériau viscoélastique dans le logiciel d'éléments finis Abaqus [6].

3.9.1 Le Polytétrafluoroéthylène (*PTFE*)

Le PTFE est devenu un matériau polymère très utile dans l'ingénierie [6,7,12], c'est un fluoropolymère issu du tétrafluoroéthylène et aussi nommé sous une marque productive (TIFLON). Ses principaux avantages sont ces caractères non adhésifs, sa résistance au fluage et à la relaxation des contraintes et aux attaques chimiques. Il a été découvert en 1938 par Roy Plunkett de la société Dupont. Sa structure chimique est constituée de chaines d'atomes de carbone liées entre elles, avec des branches d'atomes de fluor attachées [7]. De plus, des propriétés physiques spécifiques peuvent être améliorées en ajoutant des composés de remplissage ou en modifiant le processus de fabrication. Tout au long de cette thèse, le nom PTFE sera utilisé pour étiqueter le matériau.

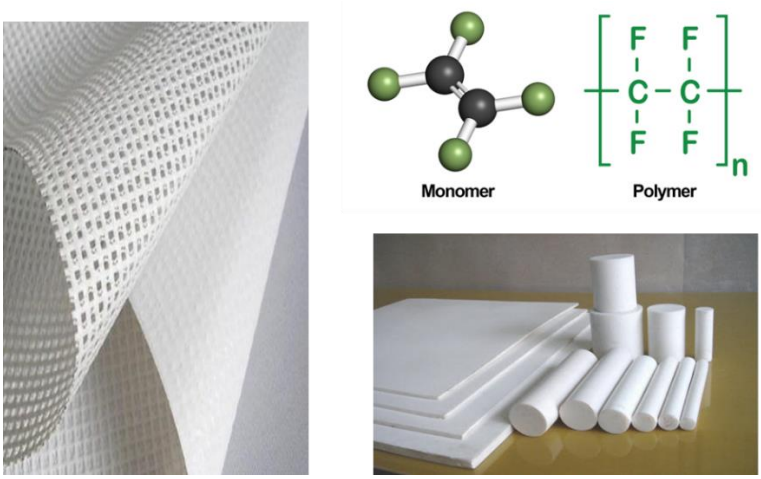


Fig. 3.11 Le PTFE sous forme de tissu et des sections géométriques et sa désignation moléculaire

3.9.1.1 Détermination des paramètres viscoélastiques du PTFE

Les caractéristiques mécaniques du PTFE :

E = 176.4 MPa, ν = 0.46, G = 56.164Mpa, K = 683.33Mpa, ρ = 2.2 g/cm^3

3.9.1.1.1 Essai de Fluage pour le PTFE [7]

La contrainte est maintenue constante durant l'essai à σ_0 =12 Mpa, la figure 3.12 représente la variation de la complaisance ($D(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0$) en fonction du temps pour le PTFE.

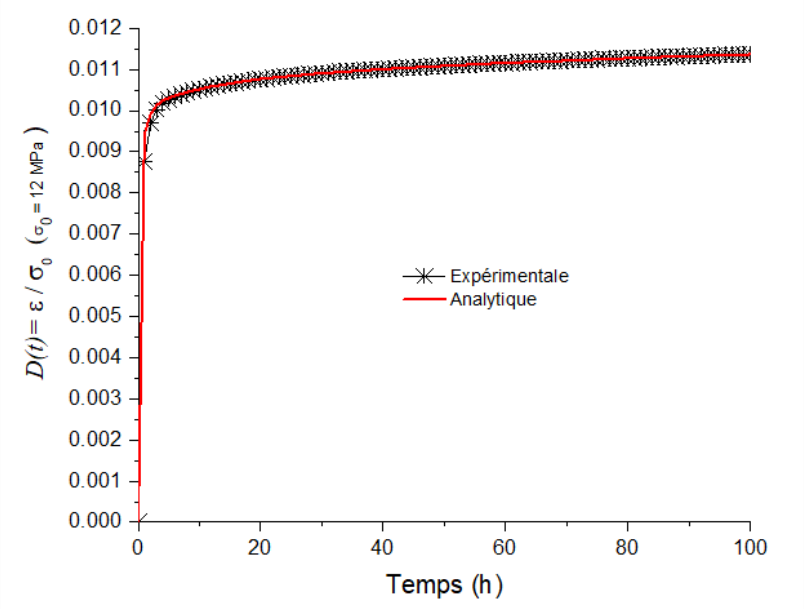


Fig. 3.12 Variation du module de Complaisance *D(t)* en fonction du temps pour le PTFE (σ = 12 MPa) pour les deux approches (expérimentale et numérique)

Nous pouvons remarquer que la déformation augmente d'une façon très rapide dans la première heure, pour atteindre la valeur de 0.0108 (1/MPa). La complaisance varie avec légère pente de 11% après les deux premières heures.

Notons que le logiciel Abaqus permet à l'utilisateur d'effectuer une analyse de réponse temporaire en utilisant le modèle de matériau viscoélastique, qui est défini par le modèle de Maxwell généralisé. Nous avons développé avec succès le programme d'ajustement de courbe afin qu'il nous permette d'identifier le modèle Maxwell généralisé basé sur la courbe de fluage. Pour déterminer l'expression de $D(t)$ du PTFE, il faut choisir quatre points de la courbe (Temps, complaisance)

$$\begin{cases} \begin{cases} t_1 = 0.704 & \rightarrow \tau_1 = 0.1 \\ t_2 = 56.8 & \rightarrow \tau_2 = 1 \\ t_3 = 80.5164 & \rightarrow \tau_3 = 10 \\ t_4 = 119.718 & \rightarrow \tau_4 = 100 \end{cases} \\ d_0 = 0{,}2782 \end{cases}$$

Chaque temps t_i correspond à une valeur de d_i

$$D(t) = [0.006 + (1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}})x + (1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}})y + (1 - e^{-\frac{t}{\tau_3}})z + (1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}})w]_{\substack{\{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\} \\ \{t_1,t_2,t_3,t_4\}}} \tag{3.70}$$

$$\begin{cases} 0.006 + 7.0153.10^{-3} w + 0.99912x + 0.5054y + 6.7979 * 10^{-2} z = 0.0091944 \\ 0.006 + 0.43338w + 1.0x + 1.0y + 0.99659z = 0.0111389 \\ 0.006 + 0.55299w + 1.0x + 1.0y + 0.99968z = 0.0112778 \\ 0.006 + 0.69796w + 1.0x + 1.0y + 0.99999z = 0.0114444 \end{cases} \tag{3.71}$$

L'écriture matricielle des quatre équations est comme suit :

$$\begin{bmatrix} 7.0153.10^{-3} & 0.99912 & 0.5054 & 6.7979.10^{-2} \\ 0.43338 & 1 & 1 & 0.99659 \\ 0.55299 & 1 & 1 & 0.99968 \\ 0.69796 & 1 & 1 & 0.99999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0031944 \\ 0.0051389 \\ 0.0052778 \\ 0.0054444 \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

Après la résolution du système linéaire de 4 équations par la méthode d'élimination de Gausse, on obtient les valeurs des 4 inconnues (w, x, y, z) qui présentent les valeurs de d_i

$$\begin{cases} x = 2.2537E-3 \\ y = 1.7652E-3 \\ z = 6.2586E-4 \\ w = 1.1451E-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 4.7473E-2 \\ d_2 = 4.2014E-2 \\ d_3 = 2.5017E-2 \\ d_4 = 3.3839E-2 \end{cases}$$

L'expression de $D(t)$ devient :

$$D(t) = 0.006 + 2.2537*10^{-3}(1-e^{-\frac{t}{0.1}}) + 1.7652*10^{-3}(1-e^{-\frac{t}{1}}) + 6.2586*10^{-4}(1-e^{-\frac{t}{10}}) + 1.1451*10^{-3}(1-e^{-\frac{t}{100}}) \quad (3.73)$$

La puissance de cette méthode réside dans sa capacité à décrire le comportement des matériaux viscoélastiques dans une large bande de fréquence. De plus, elle permet un passage aisé entre le domaine temporel et fréquentiel (par la transformée inverse), et inversement. Toutefois, la précision de cette méthode est directement liée au nombre de termes *N* utilisés et le temps de calcul peut ainsi rapidement augmenter.

Il existe enfin d'autres techniques permettant d'exprimer le module de cisaillement en fonction de la fréquence. Ces techniques sont généralement empiriques et spécifiques.

Le module de relaxation *E(t)* est, obtenu en inversant la transformé de Laplace de l'expression de la complaisance *D(t)*,

$$s\,\mathfrak{T}[E(t)] = \frac{1}{s\,\mathfrak{T}[D(t)]}$$

$$\mathfrak{T}[D(t)] = \frac{1.1790.10^{-2}}{s} - \frac{1.7652.10^{-3}}{s+1} - \frac{6.2586.10^{-4}}{s+\frac{1}{10}} - \frac{1.1451.10^{-3}}{s+\frac{1}{100}} - \frac{2.2537.10^{-3}}{s+10} \quad (3.74)$$

$$\frac{1}{s^2\mathfrak{T}[D(t)]} = \frac{1}{s^2\left(-\frac{1.1451.10^{-3}}{s+\frac{1}{100}} - \frac{6.2586.10^{-4}}{s+\frac{1}{10}} + \frac{1.1790.10^{-2}}{s} - \frac{1.7652.10^{-3}}{s+1} - \frac{2.2537.10^{-3}}{s+10}\right)} \quad (3.75)$$

$$\mathfrak{T}[E(t)] = \frac{1}{s}(s+10.0)\frac{1000s^3+1110s^2+111s+1}{6.0001s^4+91.038s^3+110.95s^2+11.871s+0.1179} \quad (3.76)$$

$$\frac{E(t)}{E_0} = \mathfrak{T}^{-1}\left[\frac{1}{s^2\,\mathfrak{T}[D(t)]}\right] = \begin{aligned} &0.12045e^{(-1.2078)t} + 5.5738*10^{-2}e^{(-1.1066*10^{-2})t} \\ &+ 3.4329.10^{-2}e^{(-0.10617)t} + 0.28259e^{(-13.848)t} + 0.50889 \end{aligned} \tag{3.77}$$

L'organigramme de calcul et le programme écrit en (Matlab) sont donnés en [ANNEXE1].

Après le relâchement de la contrainte σ (déchargement), l'éprouvette subira une perte de rigidité, c'est-à-dire une relaxation des contraintes.

Le module de relaxation en traction devient :

$$E(t) = 0.508889 + 0.282591e^{-\frac{t}{0.0722}} + 0.120451e^{-\frac{t}{0.82850}} + 0.034329e^{-\frac{t}{9.4188}} + 0.055738e^{-\frac{t}{90.3667}} \tag{3.78}$$

Le module de relaxation en cisaillement (La rigidité transversale) :

$$G(t) = 0.174279 + 0.096777\,e^{-\frac{t}{0.0722}} + 0.041251\,e^{-\frac{t}{0.8285}} + 0.011757\,e^{-\frac{t}{9.4188}} + 0.018403\,e^{-\frac{t}{90.3667}} \tag{3.79}$$

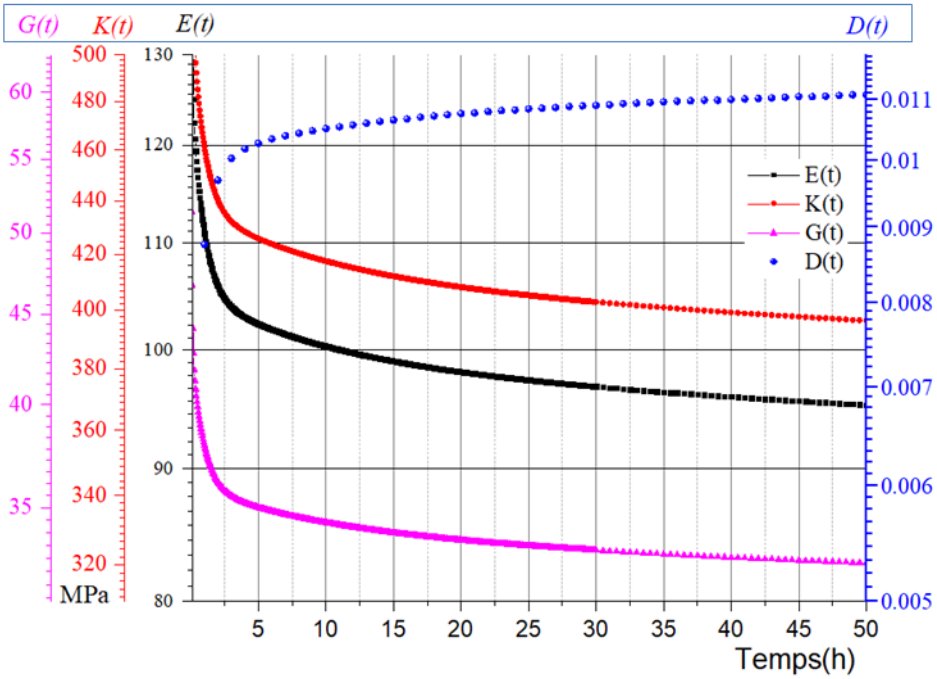


Fig. 3.13 Courbes maîtresses représentant l'évolution des modules de relaxation (*E(t), K(t), G(t)*) et de complaisance (*D(t)*) en fonction de temps en échelle semi-logarithmique pour le PTFE.

La figure 3.13 montre la variation des modules de relaxation (*E(t), K(t), G(t)*) et de complaisance (*D(t)*) avec le temps. La déformation de fluage s'accumule sur le modèle de fluage, et donc la déformation de fluage représentée par le module *D(t)* augmente. La déformation élastique est directement liée à la contrainte, de sorte que la diminution de la déformation élastique entraine une diminution de la contrainte, provoquant la relaxation de la contrainte. La figure montre aussi une forte réduction initiale de module de relaxation suivie d'une décroissance élancée et progressive. Cette diminution de la contrainte avec le temps pour un cas de déformation constante représente une relaxation de contrainte. Notons que la relaxation des contraintes est caractérisée à l'aide d'un modèle de fluage avec des conditions aux limites provoquant une déformation constante dans l'échantillon.

Connaissant l'un module des deux modules *E(t)* ou *D(t)*, et en acceptant un comportement homogène isotrope des matériaux testés, on sera donc capable, de déterminer les deux autres expressions de *G(t)* et *K(t)* pour obtenir les termes de la série de Prony représentés par les couples (g_i^G, τ_i^G) et (g_i^K, τ_i^K) (les coefficients de série de Prony)

En utilisant les lois d'élasticité, on peut obtenir le module de cisaillement *G(t)* et de compressibilité *K(t)* :

$$G_R(t) = 0.174279 + 0.096777e^{-\frac{t}{0.0722}} + 0.041251e^{-\frac{t}{0.8285}} + 0.011757e^{-\frac{t}{9.4188}} + 0.018403e^{-\frac{t}{90.3667}} \tag{3.80}$$

$$G_0 = G(t=0) \quad = 0.34247$$
$$G_\infty = G(t \to \infty) = 0.174279$$

La plus importante relaxation des contraintes est juste après le déchargement, mais elle se poursuit pendant un temps en raison du glissement des chaines moléculaires. Ce comportement est montré sur la figure 3.14. On remarque une chute dans les valeurs de module de relaxation relative de 48% dans les trois premières heures.

Finalement, les coefficients de Prony découvrant le comportement viscoélastique du matériau (PTFE) sont :

$$\tau_1^G = 0.0722 \quad \rightarrow \quad g_1^G = 0.28259$$
$$\tau_2^G = 0.8285 \quad \rightarrow \quad g_2^G = 0.12045$$
$$\tau_3^G = 9.4188 \quad \rightarrow \quad g_3^G = 0.03433$$
$$\tau_4^G = 90.3670 \quad \rightarrow \quad g_4^G = 0.05374$$

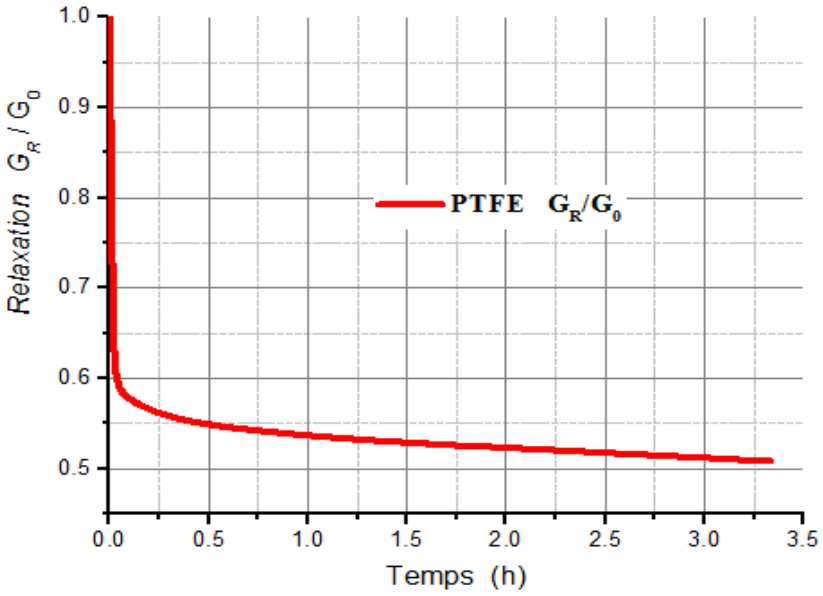


Fig. 3.14 Évolution du module de relaxation normalisé $G_R(t)/G_0$ en fonction du temps pour le *PTFE*

3.9.1.1.2 Modules complexes pour le PTFE

Une description basée sur des caractéristiques complexes des matériaux est donc plus apte à décrire la viscoélasticité dans le domaine des fréquences. Dans cette approche, la partie réelle de ces caractéristiques est liée à l'élasticité tandis que la partie imaginaire correspond à la dissipation. Cette étude concerne l'identification des caractéristiques viscoélastiques linéaires des matériaux polymères. Celles-ci peuvent être représentées dans le domaine des fréquences par des modules complexes montrés dans les équations 3.66 et 3.67.

Si le matériau se comporte comme un solide élastique, les modules G_S et G_L sont équivalents.

Une présentation graphique multiaxiale (figure 3.15) résume la variation du module de stockage normalisé G_S/G_0, le module de perte normalisé G_L/G_0 et le facteur de perte η en fonction de la fréquence f *(Hz)*. Pour les basses fréquences, les modules liés à l'amortissement présentent un maximum pour des fréquences au voisinage de 2 Hz.

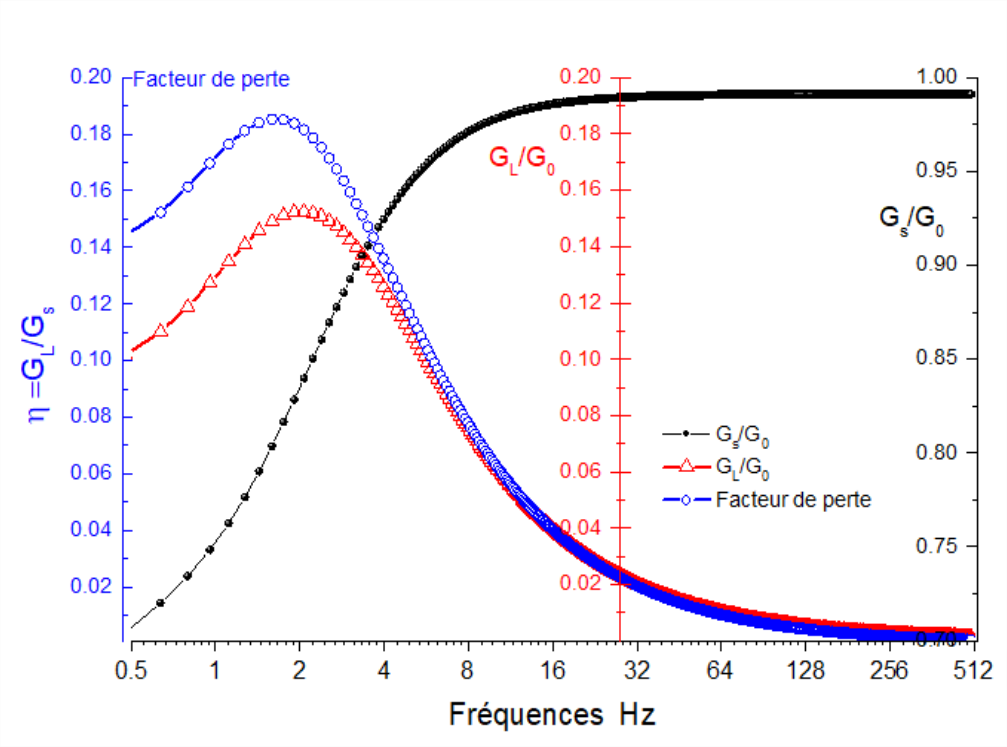


Fig. 3.15 Variation du module de stockage normalisé G_S, module de perte normalisé G_L et le facteur de perte η en fonction de la fréquence pour le *PTFE*

La variation des modules dynamiques en fonction de la fréquence peut être divisée en plusieurs parties. En analysant le module des hautes fréquences vers les basses fréquences, il se décompose comme suit :

- Aux très hautes fréquences (f >250 Hz), le module de perte dynamique présente un minimum, et le facteur de perte tend vers une valeur limite et varie peu avec la fréquence.
- Pour des fréquences comprises entre $0 \leq f \leq 2$ Hz, une première pente retrace l´évolution de l'amplitude du module, avec un premier pic du facteur de perte de 0.18 autour de 2 Hz.
- Une chute de 12 % de l'amplitude du module et du facteur de perte pour des fréquences comprises entre ($25 \leq f \leq 250$ Hz),
- Le module de stockage augmente de 4 % pour toutes les fréquences comprises entre 15 Hz et 300 Hz.

- Nous constatons qu'aux hautes fréquences, dans la zone de transition, le module de perte et le facteur de perte se superposent.

- Aucune variation notable du module de stockage G_S ($G_S = G_0$) pour toutes les fréquences supérieures à 250 Hz.

En conclusion, nous pourrions déterminer des paramètres viscoélastiques capables de reproduire efficacement les données du module de stockage et de perte et, par conséquent, on déduit la décroissance du module de relaxation dans le domaine temporel.

3.9.2 Le polycarbonate

Polycarbonate est de plus en plus utilisé dans le secteur industriel de l'automobile, d'aviation et aérospatiale. En plus d'être solide, il est aussi très léger, et peut être coloré. En particulier, une matière plastique rigide et très résistante, utilisée pour sa transparence comme verre organique, est obtenue à partir d'acide carbonique et lié par un groupe chimique dérivé du bisphénol. Il est considéré comme une substance amorphe (qui à l'état solide n'a pas de structure cristalline) et est thermoplastique parce qu'il possède des propriétés mécaniques qui varient en fonction de plusieurs facteurs tels que le type de l'excitation extérieure (les sollicitations) et la température à laquelle il est exposé (la dilatation thermique). Sa matière présente donc une double résistance aux chocs et aux rayures, mais peut également subir des changements de températures élevées sans s'abimer ou se déformer. Le polycarbonate est donc un thermoplastique polymère utilisé dans un grand nombre d'objets du quotidien, et aussi sa grande disponibilité aux marchés industriels et ça lui permet d'être le bon choix pour les diverses applications, parce qu'il s'adapte à tous les besoins.

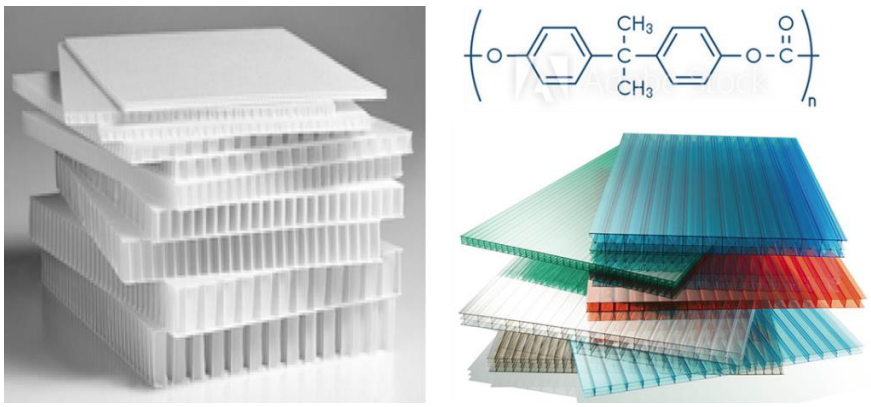


Fig. 3.16 Le Polycarbonate sous forme des plaques sandwich et de panneau de toiture et ça structure moléculaire

3.9.2.1 Détermination des paramètres viscoélastiques du Polycarbonate

Le polycarbonate est choisi en raison de sa rigidité et de sa propriété d'amortissement viscoélastique. De plus, les polycarbonates présentent une dissipation d'énergie viscoélastique élevée à haute température [5, 10,11].

Les caractéristiques mécaniques du Polycarbonate :

E = 2200 MPa, ν = 0.37, G = 802.92 Mpa, K = 2820.92Mpa, ρ = 2.075 g/cm^3

3.9.2.1.1 Essai de Fluage pour le Polycarbonate [10]

La figure 3.17 montre la variation de la complaisance $D(t)$ en fonction du temps pour le Polycarbonate. La contrainte est maintenue à une valeur constante σ=50.85 MPa, la déformation augmente rapidement dans la première heure, pour atteindre la valeur $D(t)$ = 0.125 (1/MPa). Après laquelle la déformation devient lente et constante.

La Comparaison de la courbe théorique $D(t)$ donnée l'équation de la complaisance avec les points de la solution donnés par le modèle numérique d'ABAQUS pour une éprouvette en Polycarbonate soumise à une contrainte de 50.85 MPa est représentée par le graphe (figure 3.17)

$$D(t) = 277.76 - 6.3831\times10^{-2}\, e^{-613.07t} - 1.9750\, e^{-9.1479\times10^{-2}t} - 274.72\, e^{-9.8743\times10^{-4}t} \qquad (3.81)$$

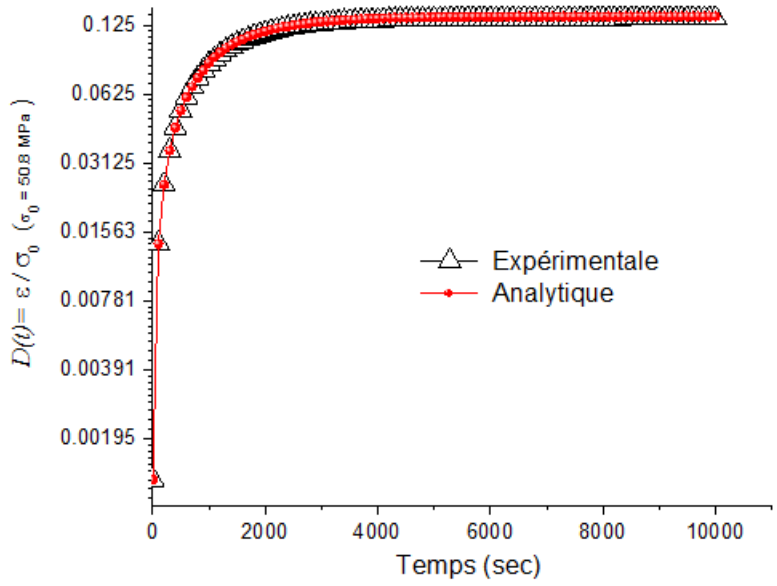


Fig. 3.17 Comparaison de la courbe de complaisance obtenue expérimentalement $D(t)$ avec la courbe du spectre déduit par la méthode analytique pour le Polycarbonate. (σ = 50.8 *MPa*)

On voit que les courbes se superposent parfaitement une fois que les termes *di* ont été trouvés. Une fois, la complaisance *D(t)* est définie, il est relativement aisé de remonter au module de relaxation *E(t)* et au module de cisaillement *G(t)* (figure 3.18).

Les modules de relaxation du polycarbonate sont formulés par la série de Prony en utilisant trois termes correspondant au temps de relaxation significatif par l'ajustement non linéaire des moindres carrés effectué sur ces données.

Les modules de relaxation :

$$E(t) = 5.9978.10^{-2} e^{-652.23t} + 0.091367\, e^{-5.0528\times10^{-2}t} + 0.84503 e^{-0.46674t} + 3.6255\times10^{-3}$$
$$G(t) = 0.0013232 + 0.02189 e^{-\left(\frac{t}{0.0015332}\right)} + 0.030841 e^{-\left(\frac{t}{2.1425}\right)} + 0.033346\, e^{-\left(\frac{t}{19.791}\right)} \quad (3.82)$$

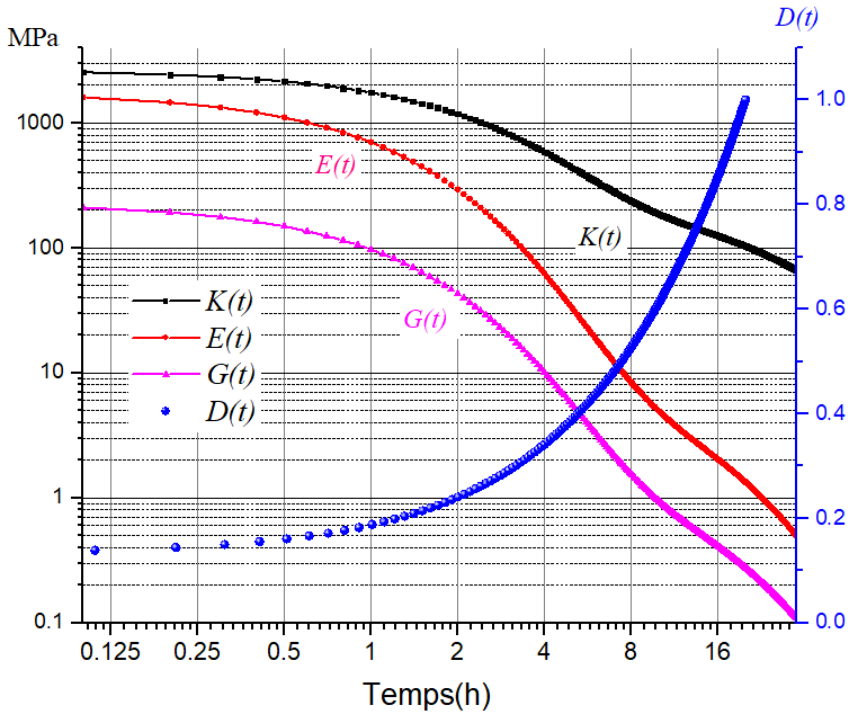


Fig. 3.18 Courbes maîtresses représentant l'évolution des modules de relaxation (*E(t)*, *K(t)*, *G(t)*) et de complaisance (*D(t)*) en fonction de temps en double logarithmique pour le Polycarbonate

La courbe du module de relaxation en cisaillement normalisé $G_R(t)/G_0$ pour le polycarbonate est représentée sur la figure 3.19.

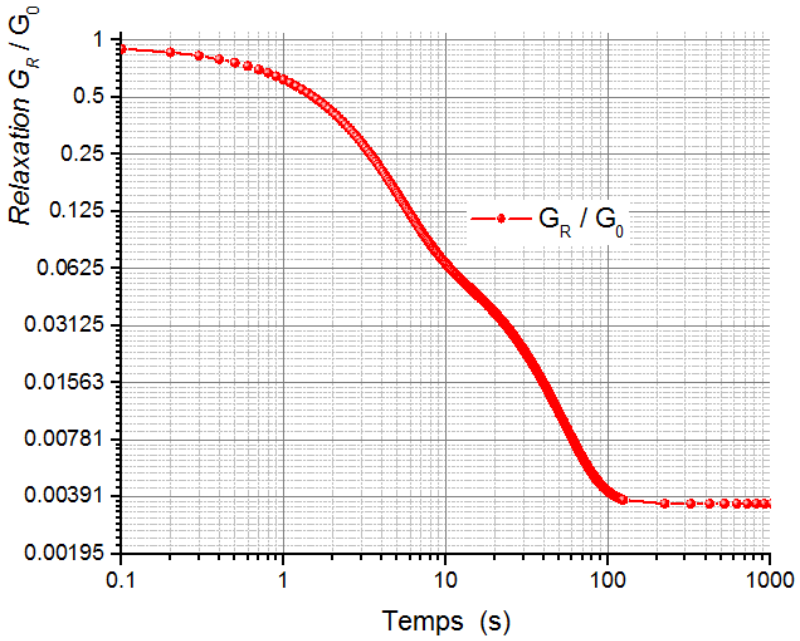
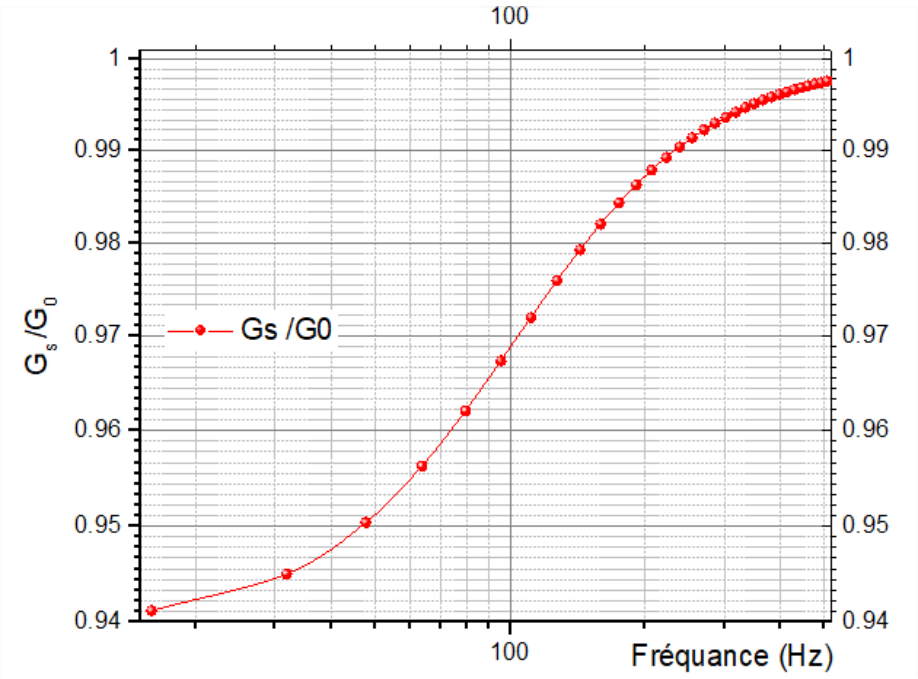
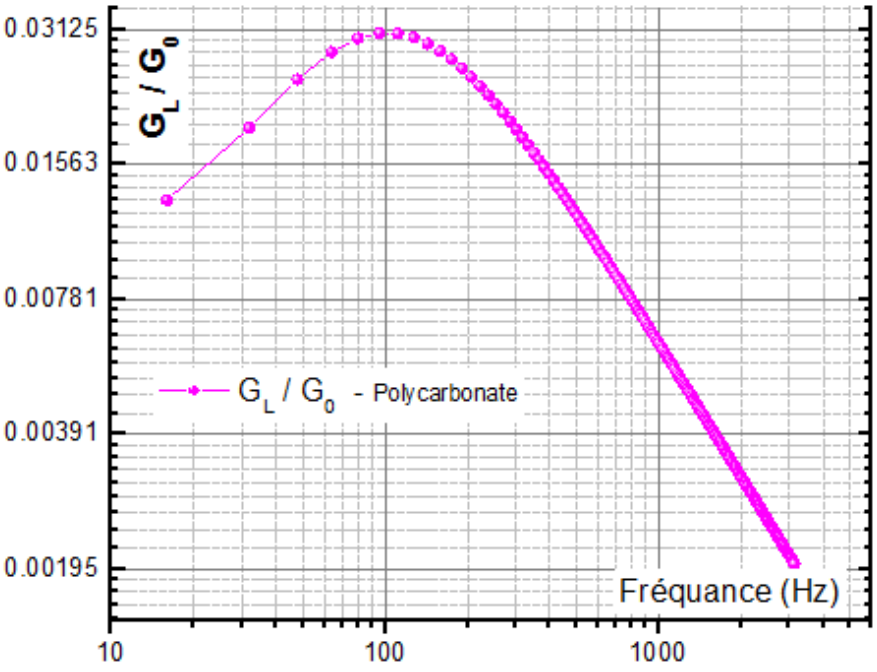


Fig. 3.19 Variation du module de relaxation normalisé $G_R(t)/G_0$ en fonction du temps pour le *Polycarbonate*

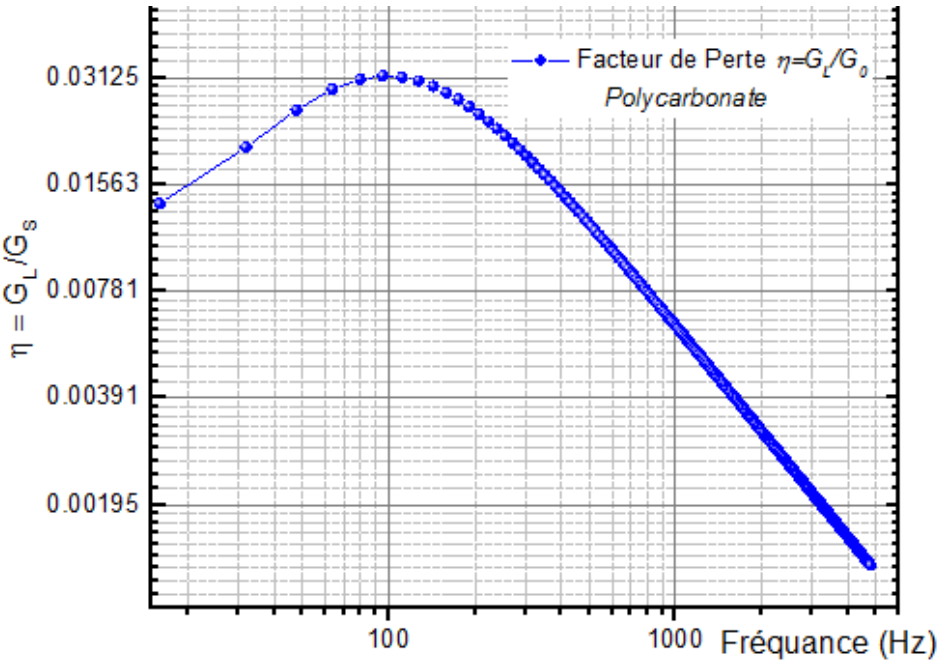
La figure 3.20 représente la variation en échelle logarithmique les modules des modules dynamiques normalisés en fonction de la fréquence calculée par les équations 3.66 et 3.67 pour le Polycarbonate.



(a)



(b)



(c)

Fig. 3.20 Variation des modules dynamiques normalisés en fonction de la fréquence pour le Polycarbonate.

a) Module de stockage normalisé G_s/G_0, b) Module de perte normalisé G_L/G_0

c) Facteur de perte $\eta = G_L/G_s$

Le module de stockage (G_s), caractérise le comportement élastique du matériau soit sa capacité à emmagasiner et restituer de l'énergie au cours d'un cycle. Les résultats obtenus montrent

d'une part que le module de stockage (G_s) est toujours plus grand que le module de perte (G_L) caractérisant le comportement visqueux du matériau et donc sa capacité à dissiper l'énergie sous forme de chaleur au cours d'un cycle, d'autre part, les deux modules dépendent d'une manière significative, de la fréquence et de la déformation.
Le module de stockage (G_s) commence par un minimum de $0.0036G_0$ pour les basses fréquences ensuite, il augmente avec la fréquence pour atteindre une limite proche de G_0.

En analysant la variation des modules de basses fréquences vers les hautes fréquences, on constate que le module et le facteur de perte dynamiques passent par un maximum pour une fréquence de 100 Hz, ensuite décroit de 24 fois pour une haute fréquence de 4000 Hz figure 3.19 (b et c)
La comparaison graphique de la variation des quatre modules dans le temps pour le polycarbonate est donnée dans la figure 3.18.

Les coefficients de la série de Prony g_k^G et τ_k^G obtenus à partir de l'ajustement de la courbe sont indiqués ci-dessous.

$$\tau_1^G = 0.0015332 \rightarrow g_1^G = 0.060101$$
$$\tau_2^G = 2.1425100 \rightarrow g_2^G = 0.845580$$
$$\tau_3^G = 19.791000 \rightarrow g_3^G = 0.090680$$

Les méthodes d'analyse présentées dans cette partie ont permis de mettre en évidence le comportement viscoélastique du matériau étudié et, en particulier, la dépendance du module élastique et du facteur de perte à la fréquence. En effet, les résultats obtenus couvrent un spectre de fréquences étendu (de 0.01 à 2000 Hz) qui seront ensuite utilisés dans un calcul de la réponse dynamique des structures cellulaires amorties par des couches viscoélastiques.

3.10 Remarques et Conclusions

➢ Remarques

- Cette étude concerne l'identification des caractéristiques viscoélastiques linéaires des matériaux polymères. Celles-ci peuvent être représentées dans le domaine des fréquences par des modules complexes. Leur partie réelle correspond aux propriétés d'élasticités et leur partie imaginaire aux dissipations du matériau. Les résultats montrent que les parties imaginaires des modules sont inférieures de plusieurs ordres de grandeur à leur partie réelle et toutes ces propriétés dépendent de la fréquence.

- Deux approches de la viscoélasticité sont possibles : une approche dans le domaine temporel, et une approche dans le domaine fréquentiel. Les deux domaines sont équivalents, et l'on peut passer de l'un à l'autre en utilisant une transformée de Laplace ou une transformée inverse.
- Un modèle analytique fiable et complet résultant d'une représentation rhéologique du comportement viscoélastique de deux matériaux (PTFE et Polycarbonate) a donc été développé et validé par des données expérimentales et par la littérature. Son utilisation a permis de caractériser les propriétés viscoélastiques de deux matériaux les plus utilisés dans le domaine.
- La connaissance du facteur de perte revêt un intérêt pratique considérable ;
- À la différence de la rigidité (ou du module d'élasticité), l'amortissement est indépendant de la forme de l'échantillon et ne peut en général être déduit de simples mesures statiques.
- Les résultats montrent que la méthodologie mise en œuvre peut être considérée comme adéquate pour caractériser les matériaux viscoélastiques dans les deux domaines (temporel et fréquentiel) à condition qu'ils aient un comportement similaire à celui de l'hypothèse du modèle considéré.

➢ Conclusions

Cette section présente une synthèse des modèles de caractérisation de matériaux viscoélastiques qui seront utilisés comme de matériau amortissant les vibrations dans le chapitre suivant. On rappelle que la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire se ramène à celle d'un matériau élastique linéaire à condition de considérer le module élastique comme une quantité complexe dépendant de la fréquence. Les propriétés amortissantes de tels matériaux dépendent de différents facteurs d'environnement dont on détaille exclusivement l'influence de la fréquence.

Le comportement viscoélastique de deux matériaux viscoélastiques les plus utilisés dans le domaine (PTFE, POLYCARBONATE) a été exposé et discuté à travers des modèles rhéologiques simples. Des techniques d'évaluation des paramètres viscoélastiques à partir d'un essai de fluage sont utilisés pour fixer les constantes viscoélastiques nécessaires permettant d'intégrer le modèle de comportement du matériau dans le logiciel ABAQUS à travers les constantes de la série de Prony ou la relaxation.

Le polymère polycarbonate, est choisi comme matériau de base, pour le noyau en nid-d'abeilles dans la suite de cette étude. Il existe d'autres matériaux comme les élastomères qui semblent avoir une énergie de dissipation viscoélastique plus élevée, mais ils ne peuvent pas avoir la capacité de résister à des charges structurelles, lorsqu'ils sont utilisés pour le matériau des nids d'abeilles.

Les résultats trouvés dans cette partie concernent la mise en œuvre d'un modèle viscoélastique représentatif pour deux polymères. Le calcul des caractéristiques viscoélastiques telles que le module de relaxation et le facteur de perte en fonction temps. Ces résultats seront ensuite utilisés dans un calcul de prédiction de la réponse dynamique des structures en nid-d'abeilles équipées d'un amortissement passif par insertion des couches viscoélastiques.

Les travaux futurs doivent se concentrer sur le comportement anisotrope non linéaire des matériaux viscoélastiques.

3.11 Références

[1] A Kareem, K Gurley, " Damping in structures: its evaluation and treatment of uncertainity", Journal of wind engineering and Industrial Aerodynamics 59 (1996) 131-157.

[2] E. Riande, R Diaz, M Prolongo, R. Masegosa, G. Salom " Polymere viscoelasticity stress and strain in practice" Marcel. Dekker, ISBN 0-8247-7904-5 -New York 2000

[3] Park, SW, Schapery, RA (1999). Interconversion methods between linear functions of viscoelastic materials. Part I - a numerical method based on the Prony series. International Journal of Solids and Structures, 36: 1653-1675.

[4] Chen, T. Determination of a Prony series for a viscoelastic material from time varying strain data. Internal report. NASA - National Technical Information Service-2000.

[5] Mercier, J.P. 1965, "Viscoelastic Behavior of the Polycarbonate of Bisphenol A," Journal of Applied Polymer Science, vol. 9, pp 447-459.

[6] Rae, P.J. and D.M. Dattelbaum, The properties of poly (tetrafluoroethylene) (PTFE) in compression. Polymer, 2004. 45(22): p. 7615-7625.

[7] Guillaume Vivien. Modélisation d'une vanne à tournant sphérique munie d'un joint de polymère viscoélastique. Thèse de maîtrise ès sciences appliquées -2010.

[8] E. E. Ungar and E. M. Kerwin, "Loss Factors of Viscoelastic System in Terms of Energy Concepts", Journal of the Acoustical Society of America. 34(7), 954-957 - (1962)

[9] Chen, T. (2000). Determining a prony series for a viscoelastic material from time varying strain data. NASA/TM-2000-210123 ARL-TR-2206.

[10] Park, S. W., & Schapery, R.A. (1999). Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I - a numerical method based on Prony series. International Journal of Solids and Structures, 36(11), 1653-1675.

[11] G. Wing, A Pasricha, MTuttle, V Kumar " Time dependent reponse of Polycarbonate and microcellular polycarbonate- J. Polymer engineering and science V0l .35. N°8-1995. https://doi.org/10.1002/pen.760350807

[12] ABAQUS 6.9 Documentation.